

# La prise en compte des symétries dans CAIA

Jean-Yves Lucas

[jean-yves.lucas@edf.fr](mailto:jean-yves.lucas@edf.fr)

# Symétries dans CAIA

- A Step toward an Artificial Artificial Intelligence Scientist
  - <http://jacques.pitrat.pagesperso-orange.fr/A%20Step%20toward%20an%20Artificial%20AI%20Scientist.pdf>
- CAIA : un Chercheur Artificiel en Intelligence Artificielle
  - MALICE : résout un problème donné par MONITOR
  - MONITOR : contrôle MALICE (avance vers une solution?, choix d'une variable, propagation de contraintes coûteuse ou inutile...)
  - MANAGER : gère le comportement de MONITOR (alloue des ressources, propose des expériences et génère des nouveaux problèmes...)
  - ADVISOR : teste le comportement de MANAGER (exécute-t-il des tâches intéressantes ?)
- ZEUS : appelé par un mécanisme d'interruption, vérifie le fonctionnement des 4 agents et relance éventuellement MANAGER

# Symétries dans CAIA

- Découvrir des symétries est essentiel pour réduire la combinatoire, ou pour prouver des propriétés du problème à résoudre (par exemple pas de solution unique...)
- La découverte des symétries est faite par MANAGER
- L'ajout de contraintes pour casser des symétries est fait par MANAGER

# Symétries dans CAIA

- Un exemple : le cube magique 3x3

Placer les entiers de 1 à 27 dans les 27 cases

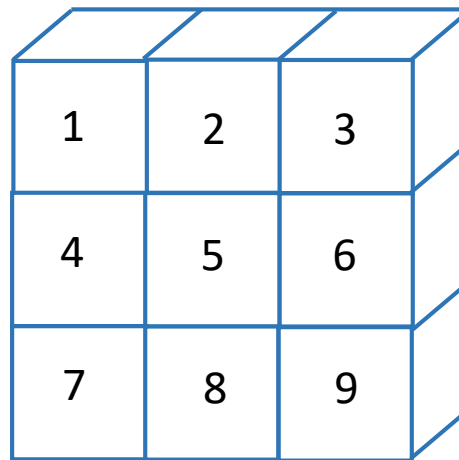
1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

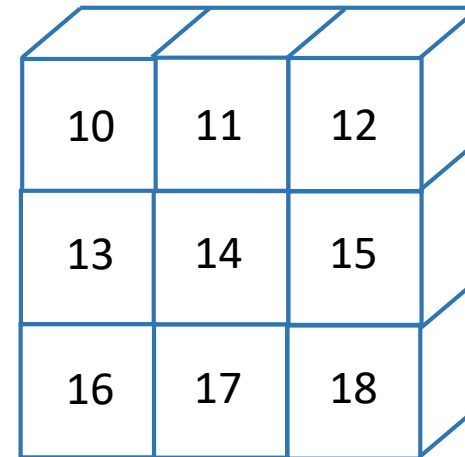
19	20	21
22	23	24
25	26	27

# Symétries dans CAIA

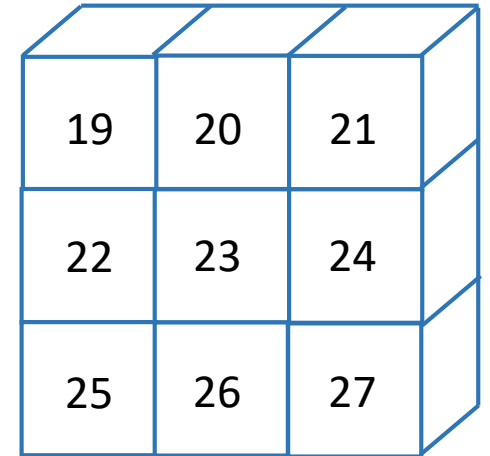
- Les contraintes du cube magique 3x3 : tous les plans constitués de 9 cases doivent avoir la même somme



1	2	3
4	5	6
7	8	9



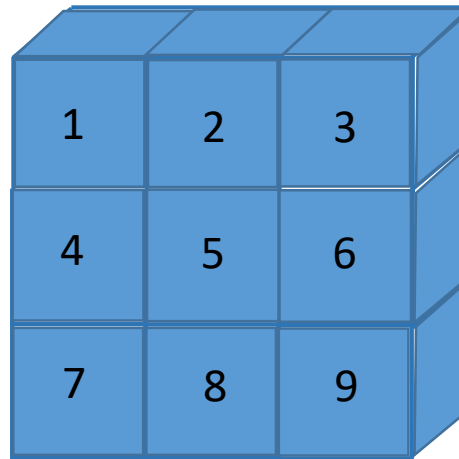
10	11	12
13	14	15
16	17	18



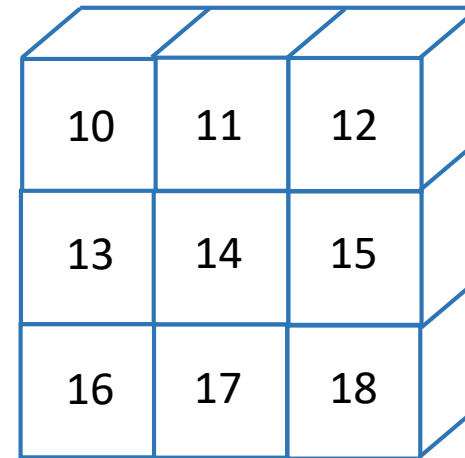
19	20	21
22	23	24
25	26	27

# Symétries dans CAIA

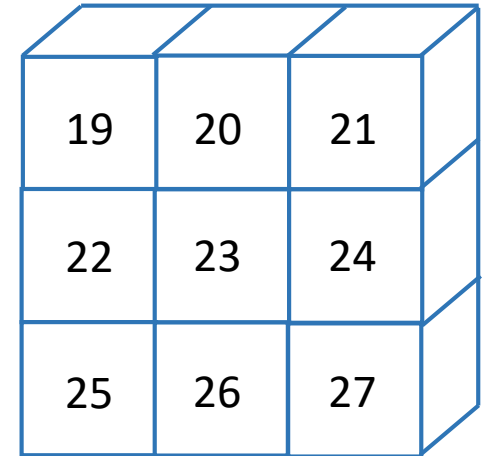
- Les contraintes du cube magique 3x3 : tous les plans constitués de 9 cases doivent avoir la même somme



1	2	3
4	5	6
7	8	9



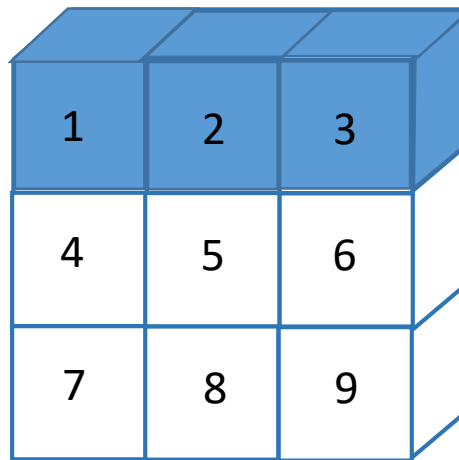
10	11	12
13	14	15
16	17	18



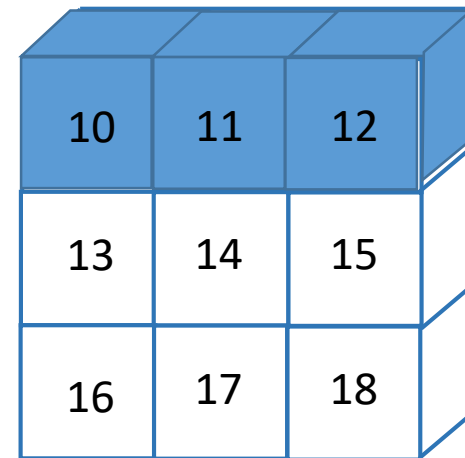
19	20	21
22	23	24
25	26	27

# Symétries dans CAIA

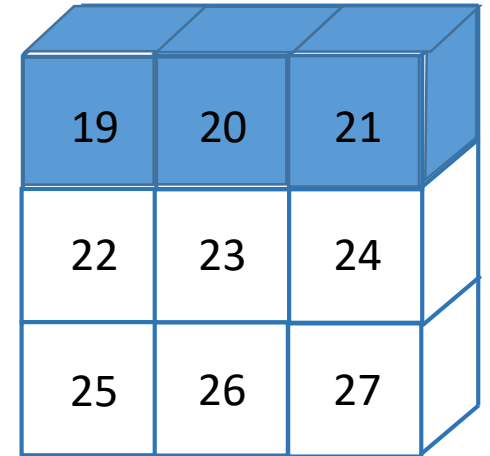
- Les contraintes du cube magique 3x3 : tous les plans constitués de 9 cases doivent avoir la même somme



1	2	3
4	5	6
7	8	9



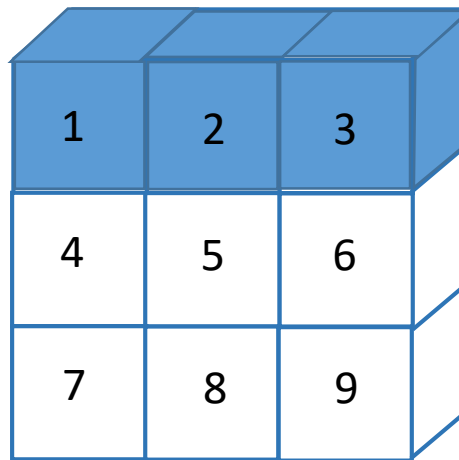
10	11	12
13	14	15
16	17	18



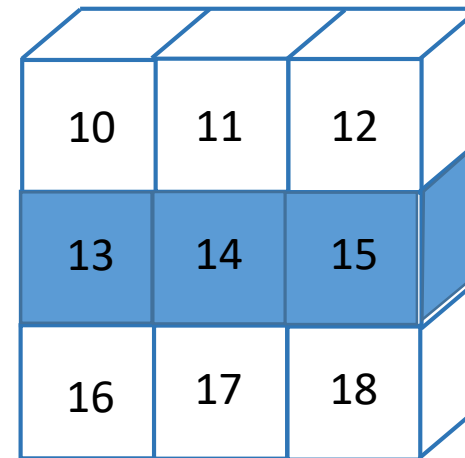
19	20	21
22	23	24
25	26	27

# Symétries dans CAIA

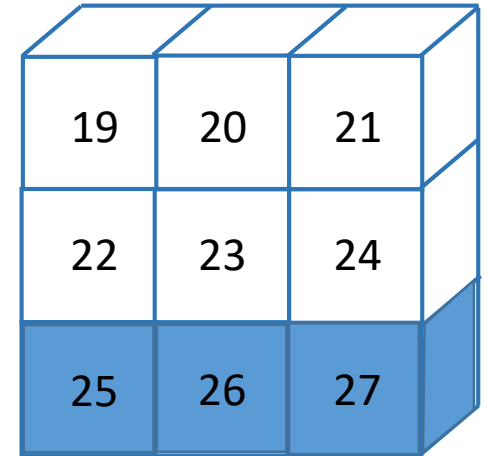
- Les contraintes du cube magique 3x3 : tous les plans constitués de 9 cases doivent avoir la même somme



1	2	3
4	5	6
7	8	9



10	11	12
13	14	15
16	17	18



19	20	21
22	23	24
25	26	27



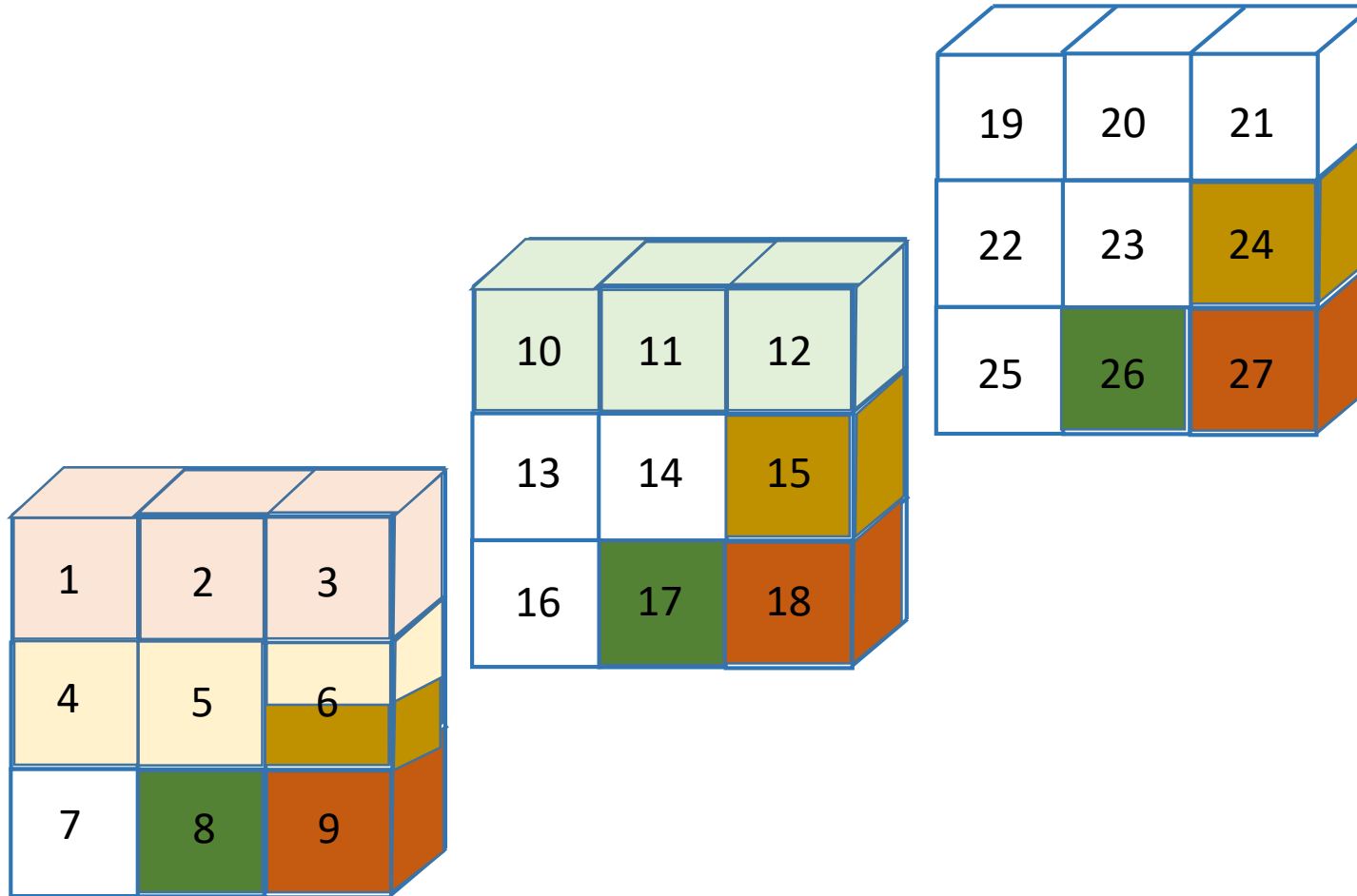
# Symétries dans CAIA

- Le problème du cube magique 3x3 :
- Soit CTE  $N = 27$
- Soit ENS  $E = [1..N]$
- Trouver VAL, F bijection  $E \rightarrow E$
- Avec
  - $F(1) + F(2) + F(3) + F(4) + F(5) + F(6) + F(7) + F(8) + F(9) = VAL$
  - $\vdots$
  - $F(1) + F(5) + F(9) + F(10) + F(14) + F(18) + F(19) + F(23) + F(27) = VAL$

# Symétries dans CAIA

- MANAGER commence par chercher des symétries :
- En posant un problème combinatoire à MALICE :
  - Trouver  $G$  bijection de l'ensemble des variables dans l'ensemble des variables, qui laisse les contraintes inchangées
- MALICE trouve ici 47 solutions, donc 47 symétries, dont certaines pas évidentes

# Symétries dans CAIA



# Symétries dans CAIA

- Casser les symétries :
  - Ajouter des contraintes, par exemple dans la symétrie précédente :
    - $F(1) < F(9)$  ou  $F(2) < F(18)$  ou  $F(11) < F(17)$  ....
    - Ajouter une contrainte peut casser plusieurs symétries, on peut donc déterminer l'ensemble minimal de contraintes à ajouter pour casser toutes les symétries (14 pour casser les 47 symétries)
- Les symétries sont passées à MALICE par MANAGER
  - Ce qui lui permet de générer les solutions symétriques...
  - Mais aussi de générer de nouvelles contraintes : quand MALICE trouve la contrainte :  
 $F(5) + F(14) + F(23) = 42$ ,
  - Il en déduit deux nouvelles contraintes :
    - $F(11) + F(14) + F(17) = 42$  et  $F(13) + F(14) + F(15) = 42$
    - Et non pas 47 car la contrainte ne comporte que 3 variables : dans de nombreuses symétries  $F(5)$  sera associée à  $F(11)$  et  $F(23)$  à  $F(17)$ , ou  $F(5)$  sera associée à  $F(17)$  et  $F(23)$  à  $F(11)$ , ou...

# Symétries dans CAIA

- trouver les symétries :
    - En construisant des permutations des variables, plus exactement en cherchant une bijection sur les contraintes qui induit une bijection sur les variables
    - 2 bijections différentes sur les contraintes peuvent mener à la même bijection sur les variables : une seule symétrie...
  - Casser les symétries :
    - Si toutes les variables prennent une valeur différente, une seule contrainte entre 2 variables suffit à casser la symétrie, sinon la contrainte est plus complexe : soit une permutation symétrique  $(U, V, W) \rightarrow (X, Y, Z)$ , alors la contrainte d'élimination est :
      - $(U < X)$  ou  $(U = X \text{ et } V < Y)$  ou  $(U = X \text{ et } V = Y \text{ et } W < Z)$  ou  $(U = X \text{ et } V = Y \text{ et } W = Z)$
- dans ce cas MANAGER ajoute aussi la contrainte plus simple  $U \leq X$

# Symétries dans CAIA

- MANAGER ne trouve pas toutes les symétries, par exemple :
  - Dans le problème du cube magique, il existe une symétrie qui consiste pour chaque variable à substituer sa valeur  $V$  par  $28 - V$
  - MANAGER ne la trouve pas, en particulier parce qu'il cherche des symétries sur l'énoncé initial du problème, or il faudrait connaître la valeur de  $VAL (=126)$  pour montrer que chaque contrainte reste inchangée si on substitue  $V$  par  $(28-V)$ 
    - $F(1) + F(2) + \dots + F(9) = VAL = 126$
    - $(X-F(1)) + (X-F(2)) + \dots + (X-F(9)) = 126$
    - $9*X = F(1) + F(2) + \dots + F(9) + 126 = 252$
  - MANAGER ne trouve pas non plus d'autres types de symétries « locales » comme par exemple dans DOMINOES qui consiste à poser des dominos sur un carré pour le rendre magique
    - Il peut y avoir des doubles (un domino avec deux fois la même valeur) ou des doublons (deux fois le même domino)
- Trouver toutes les symétries est un méta-problème très difficile !

# Les symétries dans CAIA

- Les symétries sont extrêmement utiles pour résoudre intelligemment des problèmes combinatoires. Quelques références :
  - H. Gelernter 1959 : « A Note on Syntactic Symmetry and the Manipulation of Formal Systems by Machine »
  - J.-F. Puget, Breaking symmetries in all different problems, Proceedings of IJCAI'05, 2005, pp 272-277.
  - Pierre Flener, cours 2019 université Uppsala  
<http://user.it.uu.se/~pierref/courses/COCP/slides/T05-Symmetry.pdf>
  - D. Cohen, P. Jeavons, C. Jefferson, K. Petrie : « Constraint Symmetry and Solution Symmetry » AAAI 2006
  - Ian Gent, Christopher Jefferson, université St Andrews
  - PPC : Choco, 2 contraintes globales pour casser des symétries sur les variables et sur les valeurs
  - C. Rottner 2018 « Aspects combinatoires du Unit Commitment problem » : travail sur les sous-symétries (symétries sur des sous-ensembles de solutions) dans le cadre de la PLNE